

CAS Lecture Notes Numer 7

Teresa Regińska

**Metody numeryczne
w zagadnieniach niestabilnych**

prof. dr hab. Teresa Regińska

Instytut Matematyczny

Polska Akademia Nauk

Śniadeckich 8

00-956 Warszawa

E-mail: reginska@impan.pl

Korekta: **Henryka Walas**

Redaktor merytoryczny: **Stanisław Janeczko**

Skład redakcji: **Małgorzata Zielińska, Anna Żubrowska**

Projekt graficzny i skład okładki: **Emilia Bojańczyk / Podpunkt**

© Copyright by Centrum Studiów Zaawansowanych Politechniki Warszawskiej,
Warszawa 2013

Informacje o innych wydawnictwach tej serii dostępne pod adresem www.csz.pw.edu.pl

ISBN: 978-83-61993-10-0

Wydrukowano w Polsce

Spis treści

1. Wstęp	1
2. Zadania dobrze i źle postawione, zagadnienia odwrotne	3
2.1. Przykłady zagadnień odwrotnych źle postawionych	6
2.1.1. W tomografii komputerowej	7
2.1.2. W grawimetrii i geofizyce	8
2.1.3. Zagadnienie Cauchy’ego dla równania Laplace’a	9
2.1.4. Problemy odwrotne w przewodnictwie ciepła	11
3. Rozwiązywanie układów równań liniowych	13
3.1. Oznaczenia i sformułowanie problemu	13
3.2. Równanie z macierzą kwadratową	14
3.2.1. Zadania dobrze postawione	14
3.2.2. Wartości własne i wektory własne macierzy	17
3.2.3. Uwarunkowanie zadania z macierzą symetryczną	18
3.3. Równanie z macierzą prostokątną lub macierzą osobliwą	19
3.3.1. Różne definicje rozwiązania	21
3.3.2. Wskaźnik uwarunkowania dla rozwiązania uogólnionego	24
3.3.3. Zadanie dobrze postawione w sensie uogólnionym	28
3.3.4. Wpływ błędu macierzy na rozwiązanie uogólnione	29
4. Różniczkowanie funkcji	31
4.1. Metoda różnicowa aproksymacji pochodnej	33
4.1.1. Wpływ błędu danych na wynik obliczeń	34
4.1.2. Wybór kroku siatki w zależności od błędu danych	34
4.1.3. Typowe efekty aproksymacji zadania źle postawionego	36
4.2. Metoda wygładzania	37
4.2.1. Naturalny splajn kubiczny	39
4.2.2. Oszacowanie błędu	40
4.3. Przykład zastosowania różniczkowania numerycznego	40
5. Metody regularyzacji rozwiązywania zadań źle postawionych – ogólnie	42
5.1. Metoda regularyzacji Tichonowa	44
5.2. Metody rzutowe	45
5.3. Regularyzacja a dyskretyzacja	50



6. Metoda regularyzacji Tichonowa dla równania całkowego	55
6.1. Równanie całkowe pierwszego rodzaju	55
6.2. Regularyzacja	56
6.2.1. Przykład: metoda Tichonowa do wyznaczania pochodnej	57
6.3. Wybór parametru regularyzacji i zbieżność metody	59
7. Metody regularyzacji na przykładzie równania z operatorem mnożenia	62
7.1. Metoda regularyzacji Tichonowa.....	62
7.2. Inne metody regularyzacji	65
8. Zagadnienie odwrotne dla wiązki laserowej.....	70
8.1. Model fizyczny	70
8.2. Model matematyczny	71
8.3. Zagadnienie na nieskończonej warstwie w R^2	73
8.4. Metody regularyzacji	76
8.5. Ilustracja numeryczna	79
9. Odwrotne zagadnienie ciepłoprzewodnictwa	83
9.1. Model matematyczny	83
9.2. Metody regularyzacji	87
9.2.1. Metoda Fouriera (spektralna).....	87
9.2.2. Zregularyzowana metoda Galerkina	88
9.2.3. Falki jako funkcje testowe	89
9.2.4. Testy numeryczne	93
Literatura.....	96
Skorowidz.....	98



1. Wstęp

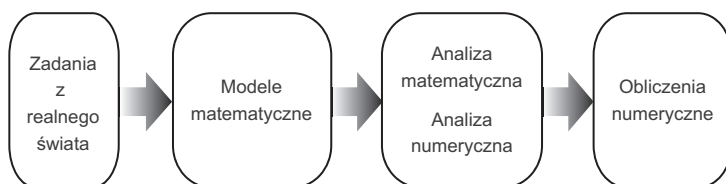
Co kryje się pod nazwą *metody numeryczne*. Jest to nazwa używana w dawnych polskich podręcznikach a obecnie zastępowana coraz częściej przez *analizę numeryczną* nazywaną czasem *matematyką obliczeń naukowych*. David Kincaid i Ward Cheney w swoim podręczniku *Analiza numeryczna* ([16]) tak opisują ten dział matematyki: *Analiza numeryczna obejmuje tworzenie, badanie i analizę algorytmów, których celem jest otrzymywanie rozwiązań numerycznych różnorodnych zadań matematycznych. Często analizę numeryczną nazywa się matematyką obliczeń naukowych*. Aby zastosować algorytm do obliczeń komputerowych, trzeba napisać program w języku zrozumiałym dla komputera. To wchodzi w zakres programowania, które pozostaje poza obrębem analizy numerycznej w ścisłym sensie tego terminu.

W tej książce nie będziemy zajmować się programowaniem, nie będziemy omawiać znanych algorytmów ani też nie będziemy zajmować się obliczeniami naukowymi, czyli rozwiązywaniem zadań matematycznych za pomocą komputerów. Będziemy natomiast zastanawiać się nad doбором znanych algorytmów i ich odpowiednim stosowaniem do pewnych zadań matematycznych kryjących w sobie pułapki obliczeniowe. Stosowanie metod numerycznych (algorytmów) jest po trosze sztuką i powinniśmy wiedzieć, na co należy zwracać uwagę przy wyborze metody (algorytmu), by nie popełnić istotnych błędów, by rozwiązanie numeryczne mówiło coś o rozwiązaniu, którego poszukujemy.

Za każdym ważnym zadaniem matematycznym stoją zwykle jakieś zastosowania, najczęściej fizyczne, chemiczne, logiczne itp. Zadania z realnego świata opisywane są za pomocą modeli matematycznych, które z kolei podlegają analizie matematycznej oraz analizie numerycznej, jeśli istnieje potrzeba rozwiązań numerycznych (rys. 1.1).

Książka powstała jako skrypt do wykładów prowadzonych w ramach Uczelnianej Oferty Studiów Zaawansowanych Politechniki Warszawskiej. Wykłady adresowane są do doktorantów i studentów wyższych lat zainteresowanych obliczeniami naukowymi, wymagają od słuchaczy znajomości analizy matematycznej, algebry liniowej, podstaw równań różniczkowych i podstaw metod numerycznych w zakresie programu studiów politechnicznych.





Rysunek 1.1

Skrypt ma na celu zapoznanie czytelnika ze specyfiką przybliżonego (numerycznego) rozwiązywania zadań niestabilnych. Omówione będą sposoby numerycznego rozwiązywania zagadnień bardzo wrażliwych na błędy danych, tzn. zagadnień niestabilnych, a w szczególności zagadnień, które dla lekko zaburzonych danych mogą w ogóle nie mieć rozwiązań. Są to tzw. zagadnienia źle postawione. Wykład oparty będzie na kilku prostych modelach matematycznych opisujących pewne zagadnienia odwrotne związane między innymi z ciepłoprzewodnictwem, tomografią komputerową, polem elektromagnetycznym. Zagadnienia takie prowadzą z reguły do zadań źle postawionych. Będzie pokazane, jak należy stosować algorytmy numeryczne do przybliżonego rozwiązywania równań występujących w tych modelach, aby wyniki obliczeń opartych na przybliżonych danych pomiarowych były akceptowalnym przybliżeniem rekonstruowanych rozwiązań. Wykład ma na celu uczulenie słuchaczy na niebezpieczeństwo otrzymania błędnych wyników, do których może doprowadzić bezkrytyczne stosowanie znanych, podręcznikowych metod numerycznych, i jednocześnie pokazać, że można rozwiązywać numerycznie w sposób stabilny również zagadnienia niestabilne.

